Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 3 de 1999.

[2'5 puntos] La función $f : R \to R$ definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{Ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, es derivable en el punto x = 0. ¿Cuánto valen b y c?

(Nota: Ln(t) es el logaritmo neperiano de t.)

Solución

$f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$; $f'(x)=\begin{cases} 2x+b & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{x-(x+1).\ln(x+1)}{x^2(x+1)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Como es derivable en x = 0, existe f '(0) y además es continua en x = 0

Si existe f '(0), $f'(0^+) = f'(0^-)$

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0}$ [x – (x+1)ln(x+1) / x^2(x+1)] = [0 / 0]= aplicamos L'Hôpital

= $\lim_{x\to 0}$ [1 – ln(x+1) + 1 / x^2 + 2x (x+1)] = [0 / 0]= aplicamos L'Hôpital

= $\lim_{x\to 0}$ { [-1 / (x+1)] / [(6x + 2)] = - ½

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0} (2x + b) = b$

Como $f'(0^+) = f'(0^-)$, b = - ½.

Como es continua en x = 0, f(0) = $\lim_{x\to 0-}$ f (x) = $\lim_{x\to 0+}$ f (x)

$\lim_{x\to 0-}$ f (x) = $\lim_{x\to 0}$ (x^2 +bx + c) = c

$\lim_{x\to 0+}$ f (x) = $\lim_{x\to 0}$ [ln(x+1) / x] = [0 / 0]= aplicamos L'Hôpital

= $\lim_{x\to 0}$ [1 / (x+1)] = 1

De f(0) = $\lim_{x\to 0-}$ f (x) = $\lim_{x\to 0+}$ f (x), obtenemos c = 1.

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 3 de 1999.

[2'5 puntos] De las funciones continuas f , g : $\Re \to \Re$ se sabe que

$$\int_1^2 (f(x)+g(x))dx=3\ ,\ \int_2^3 3(f(x)-g(x))dx=3\ ,\ \int_1^3 f(x)dx=3\ ,\ \int_1^2 2f(x)dx=3.$$

Calcula, si es posible, $\int_1^3 f(x)dx$ y, si no es posible, di por qué.

Solución

$$\int_1^2 (f(x)+g(x))dx=3\ ,\ \int_2^3 3(f(x)-g(x))dx=3,\ \int_1^3 f(x)dx=3\ ,\ \int_1^2 2f(x)dx=3.$$

$\int_1^2 (f(x)+g(x))dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_1^2 g(x)dx=3$

De $\int_1^2 2f(x)dx=3$, obtenemos $\int_1^2 f(x)dx=3/2$

Operando con estas dos expresiones obtenemos

$\int_1^2 g(x)dx=3-3/2=3/2$

$\int_2^3 3(f(x)-g(x))dx=3\int_2^3 f(x)dx -3\int_2^3 g(x)dx= 3\cdot 3/2-3\int_2^3 g(x)dx=3$

De donde $\int_2^3 g(x)dx=3/6=1/2$

$3=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx=3/2+\int_2^3 f(x)dx$

De donde $\int_2^3 f(x)dx=3-3/2=3/2$

Luego

$\int_1^3 g(x)dx=\int_1^2 g(x)dx+\int_2^3 g(x)dx=3/2+1/2=2$

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 3 de 1999.

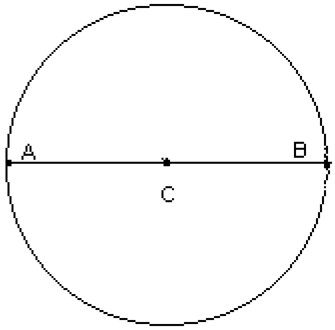
Los puntos A = (1, 2) y B = (5, 6) son los extremos de un diámetro de una circunferencia.

(a) [1'5 puntos] Calcula la ecuación de la circunferencia.

(b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto A.

Solución

(a)



El vector **AB** = (4,4), su modulo es el diámetro de la circunferencia, luego el radio es la mitad

r = ½ │ **AB** │ = ½ $(4^2+4^2)^{(1/2)}$ = $\sqrt{8}$

El centro C de la circunferencia es el punto medio del segmento AB, es decir C = [(1+5)/2, (2+6)/2] = (3,4)

La circunferencia pedida es $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 8$

(b)

La recta tangente en el punto A es una recta perpendicular al segmento AB que pase por el punto A(1,2)

Un vector perpendicular es (-4,4), cambio las coordenadas del vector **AB** = (4,4) de lugar y una de signo, luego la recta pedida es (x – 1)/(-4) = (y – 2)/(4)

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 3 de 1999.

Se dice que dos matrices A y B son semejantes cuando existe una matriz invertible P tal que AP = PB

Halla a, b, c y d sabiendo que:

(a) [1'5 puntos] Prueba que las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ son semejantes.

(b) [1 punto] Resuelve los sistemas: $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

Solución

(a)

A y B son semejantes cuando existe una matriz invertible P tal que AP = PB, luego AP – PB = O, siendo O la matriz nula.

De AP = PB, A = PBP^{-1}

$PP^{-1} = I$; de donde $|P|.|P^{-1}| = 1$

Luego $|A| = |PBP^{-1}| = |B||P||P^{-1}| = 1.\ |B| = |B|$

$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2$, $|B|=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-2$

Otra variante

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2z & y+2z\\ x & y\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & -y\\ 2z & -t\end{pmatrix}$

Igualando obtenemos

x + 2z = 2x

y + 2t = -y

x = 2z

y = -t

Tomando z = λ, y t = μ, nos resulta x = 2z = 2λ, e y = -t = -μ, por tanto la matriz P es

$P=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\lambda & -\mu\\ \lambda & \mu\end{pmatrix}$, y verifica AP = PB

(b)

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ Igualando

x + 2y = 2x

x = 2y

Tomando y = λ, sale x = 2λ. La solución es (x,y) = (2λ,λ) con $\lambda \in \Re$

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ Igualando

x + 2y = -x

x = -y

Tomando y = λ, sale x = $-\lambda$. La solución es (x,y) = $(-\lambda,\lambda)$ con $\lambda \in \Re$

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 3 de 1999.

Sea f : R $\rightarrow$ R la función definida por $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x$.

(a) [1'5 puntos] Demuestra que la recta tangente de ecuación y = - 2x + 1 es tangente a la gráfica de la función y halla el punto de tangencia correspondiente.

(b) [1 punto] ¿Corta esta recta tangente a dicha gráfica en algún punto distinto al de tangencia?

Solución

(a)

y = - 2x + 1 es tangente a la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x$

La pendiente de la función es f '(x), y la pendiente de la recta es –2, luego igualamos f '(x) a –2 y resolvemos la ecuación

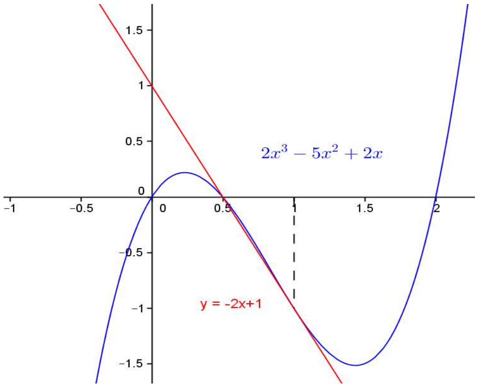
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x$

$f'(x) = 6x^2 - 10x + 2$

$f'(x) = -2$, nos da $6x^2 - 10x + 2 = -2$, $6x^2 - 10x + 4 = 0$,de donde se obtiene x = 1 y x = 2/3

Luego el punto de tangencia tiene de abcisa x = 1

Veamos una gráfica



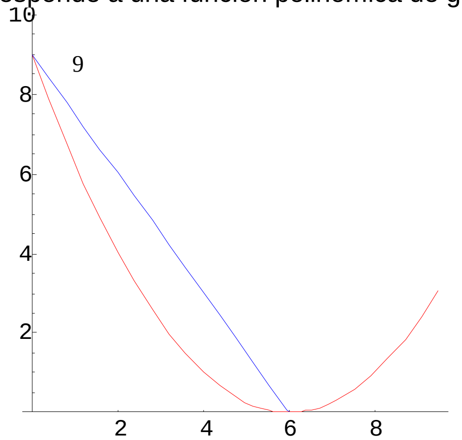
(b)

Para ver si dicha recta tangente corta en otro punto distinto del de tangencia resolvemos la ecuación f(x) = -2x + 1

$2x^3 - 5x^2 + 2x = -2x+1$; $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = (x-1)(x-1)(2x+1)$. Luego la función es cortada también en el punto x = 1/2

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 3 de 1999.

La gráfica f de la figura (en rojo) corresponde a una función polinómica de grado 2.



(a) [1'5 puntos] Determina una expresión algebraica de la función f.

(b) [1 punto] Determina el área de la región limitada por dicha función y la recta dibujada (en azul).

Solución

(a)

La parábola es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

La abcisa de su vértice es la solución de f '(x) = 0, y vemos que el vértice está en (6,0)

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b = 0$

$f'(6) = 0$, nos da $0 = 12a + b$

También (6,0) pertenece a la gráfica luego f(6) = 0 que nos da 0 = 36a + 6b +c
Además el punto (0,9) es de la gráfica luego 9 = 0 + 0 + c
Resolviendo obtenemos a = 1/14, b = -3 y c = 9
Luego $f(x) = ax^2 + bx + c = 1/14x^2 - 3x + 9$
Análogamente la recta y = mx + n pasa por los puntos (6,0) y (0,9) luego
0 = 6m + n
9 = n
de donde m = -3/2 y n = 9 y la recta es
y = mx + n = -3/2x + 9
(b)
Las funciones se cortan en x = 0 y x = 6, luego el área encerrada por ellas es

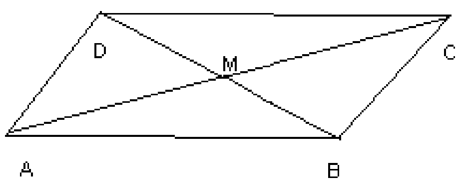
$$\text{Area}=\int_0^6\left[(-3/2x+9)-(1/4x^2-3x+9)\right]dx=\int_0^6\left[-1/4x^2-3/2x)\right]\ dx=\left[\frac{-x^3}{12}+\frac{3x^2}{4}\right]_0^6=-1.6^3/12+3.6^2/4=9\ \text{u.a.}$$

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 3 de 1999.

[2’5 puntos] Un paralelogramo cuyo centro es M = (3/2, 3, 4) tiene por vértices los puntos A = (1, 2, 3) y B = (3, 2, 5).
(a) [1 punto] Halla las coordenadas de los otros dos vértices.
(b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta que pasa por M y es perpendicular al plano que contiene al paralelogramo.
(c) [0’5 puntos] Calcula el área del paralelogramo.

Solución

(a)
M = (3/2, 3, 4), A = (1, 2, 3) y B = (3, 2, 5).



El punto medio M se corta en la mitad de las diagonales, por tanto es el punto medio de los segmentos AC y BD. Luego
(3/2,3,4) = [(1+x)/2, (2+y)/2, (3+z)/2], de donde
x = 2, y = 4, z = 5 y el punto es C(2,4,5)

(3/2,3,4) = [(3+x)/2, (2+y)/2, (5+z)/2], de donde
x = 0, y = 4, z = 3 y el punto es D(0,4,3)
(b)
La recta r pedida tiene como punto M(3/2,3,4) y como vector director **v** = **ADxAB**, que es un vector perpendicular al plano
AD = (-1,2-0)
AB = (2,0,2)

$$v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(4,2,-4)$$

La recta pedida en vectorial es $(x,y,z) = (3/2 + 4\lambda, 3 + 2\lambda, 4 - 4\lambda)$, con $\lambda \in \Re$
(c)
El área del paralelogramo es el modulo del vector **v** = **ADxAB** = (4,2,4)
Área = | **ADxAB** | = $(4^2+2^2+4^2)^{(1/2)} = 6$ u.a.

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 3 de 1999.

Se dice que una matriz A cuadrada de orden 3 es ortogonal si su inversa A^{-1} y su traspuesta A^t coinciden.

Dado un número real x sea B la matriz $B=\begin{pmatrix} \cos(x) & \text{sen}(x) & 0 \\ -\text{sen}(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(a) [1’5 puntos] ¿Es ortogonal la matriz B?
(b) [1 punto] ¿Es B^2 ortogonal?

Solución

(a)

$$B=\begin{pmatrix} \cos(x) & \operatorname{sen}(x) & 0 \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B^t=\begin{pmatrix} \cos(x) & -\operatorname{sen}(x) & 0 \\ \operatorname{sen}(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\operatorname{Adj}(B^t)$$

$$|B|=-1.\begin{vmatrix} \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix}=-1.(\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x))=-1.(1)=-1$$

$$\operatorname{Adj}(B^t)=\begin{pmatrix} -\cos(x) & \operatorname{sen}(x) & 0 \\ -\operatorname{sen}(x) & -\cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\operatorname{Adj}(B^t)=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -\cos(x) & \operatorname{sen}(x) & 0 \\ -\operatorname{sen}(x) & -\cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(x) & -\operatorname{sen}(x) & 0 \\ \operatorname{sen}(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=B^t$$

(b)

Para esta segunda parte tenemos en cuenta que $(A.B)^{-1} = B^{-1}.\ A^{-1}$ y que $(A.B)^t = B^t.\ A^t$

$(B^2)^{-1} = (B.B)^{-1} = B^{-1}.B^{-1} = B^t.\ B^t = (B.B)^t = (B^2)^t$.